Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»
Факультет математики, информационных и авиационных технологий

Богданов А.Ю.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«Теория выбора и принятия решения»

для студентов магистратуры факультета математики, информационных и авиационных технологий направления 02.04.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», профиль «Технология программирования»

Ульяновск, 2019

Методические указания для самостоятельной работы студентов магистратуры ФМИАТ направления 02.04.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» по дисциплине «Теория выбора и принятия решения» / составитель: Богданов А.Ю. – Ульяновск: УлГУ, 2019.

Настоящие методические указания предназначены для студентов магистратуры 02.04.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» для самостоятельной работы по дисциплине «Теория выбора и принятия решения». В пособии представлена литература по дисциплине, основные темы курса и рекомендации по самостоятельному изучению теоретического и практического материала.

Методические указания будут полезны студентам при подготовке к лекционным и практическим занятиям, а также к экзамену по данной дисциплине.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым Советом Факультета математики, информационных и авиационных технологий УлГУ (протокол номер 2/19 от 19 марта 2019 г.).

1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

основная:

1. Романовский И.В., Дискретный анализ: Учебное пособие для студентов, специализирующихся по прикладной математике и информатике. — 4-е изд., испр. и доп. — СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2008. — 336 с.: ил.
2. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций : пер. с англ. / Таха Хэмди А. - 6-е изд. - Москва : Вильямс, 2001.
3. Ватник П.А. Теория риска: учебное пособие. М.: ГУ-ВШЭ, 2010. http://www.sei.estile.ru/page63.

дополнительная:

1. Шапкин, А. С. Теория риска и моделирование рисковых ситуаций [Электронный ресурс] : учебник для бакалавров / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. - 6-е изд. - М.: Дашков и К, 2014.
2. Шагин, В. Л. Теория игр : учебник и практикум / В. Л. Шагин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 223 с. — (Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-03263-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/432975
3. Романовский И.В., Алгоритмы решения экстремальных задач. М:Наука, 1977, 352 с.

учебно-методическая:

1. Богданов, А.Ю. Случайный поиск : учеб.-метод. пособие / А. Ю. Богданов; Ульяновск. гос. ун-т, каф. прикл. математики. - Ульяновск : УлГУ, 2001. - Загл. с экрана. - Электрон. текстовые дан. (1 файл : 803 КБ). - Текст : электронный. http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/986
2. Воденин Дмитрий Ростиславович. Оптимизационные задачи на графах : учеб.-метод. пособие для экон. фак. / Воденин Дмитрий Ростиславович. - Ульяновск, 1999. - 72 с. : ил.
3. Воденин Дмитрий Ростиславович. Линейное программирование : учеб.-метод. пособие / Воденин Дмитрий Ростиславович; Ульяновск. гос. ун-т, Ин-т математики, физики и информ. технологий, Каф. прикл. математики. - Ульяновск : УлГУ, 2006. - Имеется печ. аналог. - Электрон. текстовые дан. (1 файл : 6,55 Мб). - Текст : электронный. http://lib.ulsu.ru/ProtectedView/Book/ViewBook/188

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1) Раздел 1. Применение графов в системах принятия решений

Тема 1. *Методы оптимальных решений составная часть исследования операций. Краткая история развития. Краткий обзор задач. Понятие графа. Частичный граф , подграф. Способы задания графов. Матрицы смежностей и матрица инцидентности. Списковый и псевдосписковый способы задания. Машинная реализация различных способов задания графа. Определения пути, контура, цикла, цепи. Связные графы. Компоненты связности. Алгоритм нахождения компонент связности. Деревья. Свойства деревьев. Иерархическое дерево.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Романовский И.В., Дискретный анализ: Учебное пособие для студентов, специализирующихся по прикладной математике и информатике. — 4-е изд., испр. и доп. — СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2008. — 336 с.: ил. -Стр. 123-161.
2. Воденин Дмитрий Ростиславович. Оптимизационные задачи на графах : учеб.-метод. пособие для экон. фак. / Воденин Дмитрий Ростиславович. - Ульяновск, 1999. - 72 с. : ил. -Стр. 15-27.

Тема 2. *Алгоритм поиска контура в графе. Постановка задачи о кратчайшем пути. Дерево кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры. Матрица кратчайших расстояний. Рекуррентная формула Беллмана. Принципы динамического программирования на примере алгоритма Беллмана. Модификация Шимбела. Алгоритм Флойда. Оценки трудоемкости алгоритмов. Кратчайшее дерево. Алгоритмы Прима и Краскала поиска кратчайшего дерева. Дерево самых длинных путей. Алгоритм нахождения максимального пути в графе.Постановка задачи о критическом пути. Метод критического пути.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Романовский И.В., Дискретный анализ: Учебное пособие для студентов, специализирующихся по прикладной математике и информатике. — 4-е изд., испр. и доп. — СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2008. — 336 с.: ил. Стр. 162-190.
2. Воденин Дмитрий Ростиславович. Оптимизационные задачи на графах : учеб.-метод. пособие для экон. фак. / Воденин Дмитрий Ростиславович. - Ульяновск, 1999. - 72 с. : ил. -Стр. 15-27.

Контрольные вопросы по разделу

1. Как вы понимаете утверждение, что методы оптимальных решений есть составная часть исследования операций?
2. Какой математический объект называется графом?
3.Что такое частичный граф, подграф?
4. Приведите примеры матрицы смежности и матрицы инцидентности.
5. Как реализуются списковый и псевдосписковый способы задания графа?
6. В чём состоит машинная реализация различных способов задания графа?
7. Дайте определения пути, контура, цикла, цепи.
8. Какой граф называется связным?

9. Как выглядят компоненты связности? Сформулируйте алгоритм нахождения компонент связности.
10. Какой граф называется деревом? Перечислите свойства деревьев. Дайте определение иерархического дерева.
11.Сформулируйте алгоритм поиска контура в графе.
12. В чём состоит постановка задачи о кратчайшем пути? Что такое дерево кратчайших путей? Сформулируйте алгоритм Дейкстры.
13. Какой прикладной смысл имеет матрица кратчайших расстояний? Выведите рекуррентную формулу Беллмана.
14. Опишите принципы динамического программирования на примере алгоритма Беллмана. В чём состоит модификация Шимбела?
15. Сформулируйте алгоритм Флойда. Каким образом можно оценить трудоемкость алгоритмов?
16. В каких задачах используется кратчайшее дерево? Сформулируйте алгоритмы Прима и Краскала поиска кратчайшего дерева.
17. Что такое дерево самых длинных путей? Обоснуйте алгоритм нахождения максимального пути в графе.
18. В чём состоит постановка задачи о критическом пути? Опишите метод критического пути.

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1) Граф задан матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Проверить наличие контура в графе.

2) Граф задан списком дуг, с указанием длины каждой:

2	6	8	15	8	3	2	1
(1,2)	(1,6)	(1,7)	(2,3)	(2,7)	(3,4)	(4,9)	(5,3)

6	8	8	8	1	6	12	3	10
(5,6)	(5,9)	(6,3)	(6,5)	(6,7)	(7,5)	(7,8)	(8,5)	(8,9)

Найти кратчайший путь в из вершины 1 в вершину 9.

3) В матрице смежности указаны длины дуг.

```
 0 19 18 99  3
 1  0 15 99  9
 19  1  0 15 12
 20 18  2  0 99
 13 16 18  2  0
```

Найти кратчайший путь из 1 в 2 алгоритмом Беллмана.

4) Граф задан списком дуг, с указанием длины каждой:

2	6	8	3	1	4	5
(1,2)	(1,5)	(1,6)	(2,3)	(2,5)	(3,4)	(3,5)

1 2 7 4 3 1 3
(5,4) (5,8) (6,5) (6,7) (7,5) (7,8) (8,4)

Найти кратчайшее дерево в этом графе.

5) Граф задан списком дуг, с указанием длины каждой:
5 2 3 2 1 3
(1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,2) (3,4)

7 6 5 9 1 1
(3,5) (3,6) (3,7) (4,7) (5,6) (6,7)
Найти критический путь в графе.

6) В матрице смежности указаны длины дуг.

```
 0  10  11  99   3
 1   0  15  99   9
15   1   0  15  12
10  17   2   0  99
13  16  18   2   0
```

Найти кратчайший путь из 1 в 2 алгоритмом Флойда.

Раздел 2. Принятие решений в условиях риска

Тема 3. *Основания теория риска. Теория риска Даниила Бернулли. Шкалы полезности. Рисковые перспективы. Функция полезности фон Неймана–Моргенштерна. Потребительский выбор в условиях риска. Рискофобы, рискофилы, рисконейтралы. Безрисковый эквивалент и премия за риск. Спрос на рисковый актив Меры Эрроу–Пратта. Процентная ставка по ненадежному займу.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Ватник П.А. Теория риска: учебное пособие. М.: ГУ-ВШЭ, 2010. http://www.sei.estile.ru/page63. –Стр. 4-43.
2. Шапкин, А. С. Теория риска и моделирование рисковых ситуаций [Электронный ресурс] : учебник для бакалавров / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. - 6-е изд. - М.: Дашков и К, 2014. – Стр. 5-61.

Тема 4. *Критерии оценки риска. Выбор в условиях неопределенности. Критерии выбора в условиях неопределенности. Критерий Лапласа. Критерий Вальда. Критерий Гурвица. Критерий Сэвиджа. Свойства принимаемых решений.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Ватник П.А. Теория риска: учебное пособие. М.: ГУ-ВШЭ, 2010. http://www.sei.estile.ru/page63 -Стр. 44-98.
2. Шапкин, А. С. Теория риска и моделирование рисковых ситуаций [Электронный ресурс] : учебник для бакалавров / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. - 6-е изд. - М.: Дашков и К, 2014. – Стр. 62-125.

Контрольные вопросы по разделу

1) В чём состоят основные постулаты теории риска?
2) Сформулируйте основные положения теория риска Даниила Бернулли.
3) Какие шкалы полезности вы знаете?
4)В чём состоят рисковые перспективы?
5) Выпишите функцию полезности фон Неймана–Моргенштерна.
6) Опишите потребительский выбор в условиях риска. Кто такие рискофобы, рискофилы, рисконейтралы?
7) Что такое безрисковый эквивалент и премия за риск? Каков бывает спрос на рисковый актив?
8) Обоснуйте меры Эрроу–Пратта.
9) Какие значения может принимать процентная ставка по ненадежному займу?
10) Сформулируйте критерии оценки риска.
11) Возможен ли выбор в условиях неопределенности?
12) Почему используются различные критерии выбора в условиях неопределенности?
13) В чём состоит критерий Лапласа?
14) Опишите критерий Вальда.
15) В чём состоит критерий Гурвица?
16) Обоснуйте выбор в критерии Сэвиджа.
17) Дайте обзор свойств принимаемых решений.

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1) Процентная ставка по ненадежному кредиту.
У кредитора имеется 20 млн. руб. Он предполагает выделить 5 млн. руб. на предоставление кредитов. Исходя из конъюнктуры рынка, кредитор выдал бы кредит под 10% годовых, если бы гарантировался 100% возврат средств через год. Однако кредитор работает с разными группами заемщиков, поэтому он знает, что вероятность невозврата кредита равна 0.05.
1.Какую процентную ставку должен назначить кредитор, если он хотел бы иметь тот же доход, что и при 100% возврате кредита?
2. Какую процентную ставку должен назначить кредитор, если он предпочитает не рисковать (рискофоб), и при этом его функция полезности $u(w) = \sqrt{w}$?
3. Какая часть процентной ставки в этом случае есть премия за риск?

2) Возможно строительство четырех типов электростанций:
A_1 (тепловых), A_2 (приплотинных), A_3 (бесшлюзовых), A_4 (шлюзовых). Состояния природы обозначим через P_1, P_2, P_3, P_4. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояния природы и задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}_{4\times 4}.$$

Выбрать оптимальный проект , используя критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица выбрав коэффициент оптимизма-пессимизма – 0.6.

3) Процентная ставка по ненадежному кредиту.
У кредитора имеется 20 млн. руб. Он предполагает выделить 10 млн. руб. на предоставление кредитов. Исходя из конъюнктуры рынка, кредитор выдал бы кредит под 5% годовых, если бы гарантировался 100% возврат средств через год. Однако кредитор работает с разными группами заемщиков, поэтому он знает, что вероятность невозврата кредита равна 0.05.
1.Какую процентную ставку должен назначить кредитор, если он хотел бы иметь тот же доход, что и при 100% возврате кредита?
2. Какую процентную ставку должен назначить кредитор, если он предпочитает не рисковать (рискофоб), и при этом его функция полезности $u(w) = \ln w$?
3. Какая часть процентной ставки в этом случае есть премия за риск?

4) Предприятие может выпускать 3 вида верхней одежды: пальто (A_1), крутки (A_2), ветровки (A_3). Прибыль от продаж товара каждого вида определяется состоянием спроса, на который существенное влияние оказывают погодные условия, которые могут принимать 3 формы: (B_1), облачная (B_2) и ясная (B_3). Зависимость дохода предприятия от вида продукции и погодных условий представлена в таблице (млн. руб):

Таблица 1.

Зависимость дохода предприятия

Товар	**Погодные условия**		
	Дожди (B_1)	**Облачно (B_2)**	**Ясно (B_3)**
Пальто(A_1)	6	9	4
Куртки (A_2)	10	6	2
Ветровки (A_3)	1	2	8

Какую стратегию выпуска товара должно принять предприятие. Используйте критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица с коэффициентом оптимизма-пессимизма 0.5 и Лапласа.

Лабораторная работа №1 “Решение задачи нелинейного программирования”
Варианты (примерные)

1. $f(x) = -3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 - 2x_1x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

2. $f(x) = -3x_1^2 - x_2^2 + 12x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le -1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

3. $f(x) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 2 \\ x_1 + 4x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

4. $f(x) = 3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 2 \\ x_1 + 4x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

5. $f(x) = 3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_2 \le 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

6. $f(x) = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

7. $f(x) = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \le 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

8. $f(x) = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

9. $f(x) = 3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

10. $f(x) = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

1. $f(\boldsymbol{x}) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2 \to \min$
2. $f(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to \min$

3. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} - x_1 + x_2 \to \min$

4. $f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \to \min$

5. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 13x_1^2 + 5x_2 \to \min$

6. $f(\boldsymbol{x}) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 - x_3 \to \min$

7. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2 \to \min$

8. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2) \to \min$

9. $f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{1 + 2x_1^2 + x_2^2} + e^{x_1^2 + 2x_2^2} - x_1 - x_2 \to \min$

10. $f(\boldsymbol{x}) = x_1 + 5x_2 + e^{x_1^2 + x_2^2} \to \min$

Лабораторная работа №2 “Численное решение задачи вариационного исчисления методом стохастической оптимизации”.

<u>Тестовая задача:</u> Найти непрерывно дифференцируемую функцию f(x)≥0, заданную на отрезке [a,b], такую, что

$$Q(f(x)) = \frac{L(f)}{S(f)} \to \min, \qquad f(a)=0,\ f(b)=0$$

L(f) – длина спрямляемой кривой y=f(x).
S(f) – площадь подграфика y=f(x).
(Эта задача похожа на классическую изопериметрическую задачу Л.Эйлера, но имеет принципиальные особенности).

Как известно, в изопериметрической задаче Эйлера оптимальная кривая является полуокружностью и

$$Q_{\min} = \frac{\pi R}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{2}{R}, \text{ (где } R = \frac{b-a}{2} \text{ - радиус).}$$

Положим [a,b]=[0,40]. $X = \{x_i\}_{i=1}^{39}$ *– вектор оптимизируемых параметров:* $x_i^{(0)}=i$, $i=1..20$; $x_i^{(0)}=40-i$, $i=21..39$, $x_0\equiv 0$, $x_{40}\equiv 0$. *Размерность задачи n = 39, радиус окружности R = 20. Начальное значение функции качества* $Q_0=Q_{квадрата}=\frac{2\sqrt{2}}{R}$.

Критерий останова: отличие функции качества от оптимального значения менее чем на 0,1% (относительная погрешность $\delta = 10^{-3}$).
Метод выбора направления спуска – статистический градиент.
Метод спуска для случая без помех – зависимый спуск.
Величины пробного и рабочего шагов должны быть порядка $\sim 10^{-1}=0,1$.

Таблица (обязательна в Отчете)

m (число пробных направлений статистического градиента	Среднее число изменений направлений спуска (на базе 10 расчетов)	Среднее квадратичное отклонение для 2-го столбца
1	1000	50
2	800	40
…	…	…
40	100	10

Необходимо представить в отчете 2-3 характерных графика ломаных (приближающих окружность), например, при m=2; 10; 20.

Затем необходимо ввести аддитивную нормальную помеху $\varepsilon(\delta_k) \sim N(0,\ \delta_k^2)$ в функцию качества $Q[f(x)]$ и провести расчеты тем же методом (*зависимый* спуск) при $m = 10$, $\delta_k = 10^{-k}$, $k = 10, 9, 8$…(пока алгоритм не «сломается», т.е. форма конечной ломаной значительно отличается от окружности). Напечатать несколько графиков. Сравнить результаты с аналогичными расчетами при независимом спуске.

Выполнить расчеты для функционала из своего варианта (зависимый спуск).

Оформить отчет.